Title	Quadratic Inequalities and Factorizations of Matrices (Research on structures of operators via methods in geometry and probability theory)
Author(s)	安藤, 毅
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1839: 56-60
Issue Date	2013-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/194944
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1839巻 2013年 56-60

Quadratic Inequalities and Factorizations of Matrices

北海道大学（名誉教授）　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)
Hokkaido University (Emeritus)
Email: ando@es.hokudai.ac.jp

1. Introduction　$\mathbb{M}_n$ は $n\times n$ の複素行列の空間とし, $\mathbb{M}_n^+$ はその中の positive semi-definite 行列のなす cone とする。以下 $\mathbb{M}_n$ の中での順序 $\geq$ はこの cone に基づくものである。すなわち $A\geq B$ は A, B が共に selfadjoint で $A-B\in\mathbb{M}_n^+$ のことである。

$A, C\in\mathbb{M}_n^+$, $B\in\mathbb{M}_n$ に関して2つの Schwarz 型の不等式を考える。

$$\langle x|Ax\rangle\cdot\langle y|Cy\rangle \ \geq\ |\langle x|By\rangle|^2 \qquad \forall\, x, y\in\mathbb{C}^n, \tag{1}$$

$$\langle x|Ax\rangle\cdot\langle x|Cx\rangle \ \geq\ |\langle x|Bx\rangle|^2 \qquad \forall\, x\in\mathbb{C}^n. \tag{2}$$

直ちに判ることは, (1) は

$$\begin{bmatrix}\langle x|Ax\rangle & \langle x|By\rangle\\ \langle y|B^*x\rangle & \langle y|Cy\rangle\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_2^+ \quad \forall\, x, y\in\mathbb{C}^n \tag{3}$$

のことで，言い換えれば

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} A & B\\ B^* & C\end{bmatrix}\geq 0, \quad i.e., \quad \mathbf{S}\in\mathbb{M}_{2n}^+ \tag{4}$$

のことである。一方 (2) は

$$\begin{bmatrix}\langle x|Ax\rangle & \langle x|Bx\rangle\\ \langle x|B^*x\rangle & \langle x|Cx\rangle\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_2^+ \quad \forall\, x\in\mathbb{C}^n \tag{5}$$

と同値となる。

(5) を満たすが (4) を満たさない例としては，$A=C=I$ のとき (4) が成り立つのは $\|B\|\leq 1$ のことであり，(5) を満たすのは $w(B)\leq 1$ のことである。ここで $w(B)$ は B の数域半径 (numerical radius) である。

よく知られたように (4) は B の A, C に関係する分解

$$B = A^{\frac{1}{2}}WC^{\frac{1}{2}} \quad \exists\, \|W\|\leq 1$$

と同値になる。このような B の parametrization が (5) の条件の下ではどのように形で可能かを探ることから出発し，それの一般化を考える。

2. Parametrization

Theorem 1.

(a) $B = B^*$ のとき，(5) $\iff$ $B = \mathrm{Re}(A^{\frac{1}{2}}WC^{\frac{1}{2}})$ $\exists\ \|W\| \le 1.$

(b) $A = C$ のとき，(5) $\iff$ $B = 2D^{\frac{1}{2}}W(A-D)^{\frac{1}{2}}$ $\exists\ 0 \le D \le A,\ \|W\| \le 1.$

この定理は次ぎのようにも理解される。

(a) $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\{\mathbf{T} + \varphi(\mathbf{T})\}$ $\exists\ \mathbf{T} \ge 0,$ (b) $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\{\mathbf{T} + \psi(\mathbf{T})\}$ $\exists\ \mathbf{T} \ge 0,$ ここで

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \psi\left(\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} T_{2,2} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{1,1} \end{bmatrix}\right).$$

これ等の証明には，positive な多項式の分解に関する Fejer-Riesz の定理を援用することができる。

Fejer-Riesz Theorem（[2] 参照） $F(\cdot)$ は $\mathbb{M}_n$ に値をとる関数とする。

(a) $F(t)$ が $t \in \mathbb{R}$ の多項式で，$F(t) \ge 0\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ なら, $\mathbb{M}_n$ に値をとる多項式で $G(t)$ で

$$F(t) = G(t)^* \cdot G(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

を満たすものが存在する。

(b) $F(e^{it})$ が $t \in \mathbb{R}$ の trigonometric 多項式で, $F(e^{it}) \ge 0\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ なら, $\mathbb{M}_n$ に値をとる analytic な trigonometric 多項式 $G(e^{it})$ で

$$F(e^{it}) = G(e^{it})^* \cdot G(e^{it}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

を満たすものがある。ここで $G(e^{it})$ が analytic とは e^{ikt} $(k = 0, 1, \ldots)$ の 1 次結合になっていることである。

この定理が現在の状況に適用できるのは，以下の理由による。

(a) $B = B^*$ で (5) が満たされる $\iff$ $F(t) := A + 2tB + t^2C \ge 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

(b) $A = C$ で (5) が満たされる $\iff$ $F(e^{it}) := 2A + e^{it}B + e^{-it}B^* \ge 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

例えば (a) の場合は，$G(t) = X_1 + tX_2$ として，$\mathbf{S}$ の背後に $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} X_1^*X_1 & X_1^*X_2 \\ X_2^*X_1 & X_2^*X_2 \end{bmatrix} \ge 0$ が存在し,

$$A = X_1^*X_1,\ C = X_2^*X_2 \quad 2B = X_1^*X_2 + X_2^*X_1$$

となっているのである。

3. Three cones　素朴な 2×2 のブロック行列に関係する Schwarz 型の不等式から出発したが，より一般に $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の中で考えるのが適当と思われる。ここで $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ は $\mathbb{M}_n$ の元を entry にもつ $m\times m$ ブロック行列の空間である。これは当然 $\mathbb{M}_{mn}$ と同一され，その同一視を通じて $\mathbb{M}_{mn}^+$ に対応する $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の cone を $\mathfrak{P}_0$ と書こう。すなわち $\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_0$ とは $\mathbf{S}=[S_{j,k}]_{j,k=1}^m \geq 0$ のことで，(4) に対応する。

さらに $\mathbb{M}_{mn}$ はテンソル積空間 $\mathbb{M}_m\otimes\mathbb{M}_n$ とも同一視される。ここでの同一視は

$$A=[\alpha_{j,k}]_{j,k=1}^m\in\mathbb{M}_m,\quad B\in\mathbb{M}_n \quad\Longrightarrow\quad A\otimes B:=[\alpha_{j,k}B]_{j,k=1}^m$$

なる対応を通じてである。

よく知られた事実

$$A\in\mathbb{M}_m^+,\ B\in\mathbb{M}_n^+ \quad\Longrightarrow\quad A\otimes B\in\mathbb{M}_{mn}^+$$

から判るのは

$$\mathfrak{P}_+ := \mathrm{Conv}\{A\otimes B:\ A\in\mathbb{M}_m^+,\ B\in\mathbb{M}_n^+\}$$

は $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の中で $\mathfrak{P}_0$ の subcone となっていることである。

$\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ には自然に inner product

$$\langle\mathbf{T}|\mathbf{S}\rangle := \mathrm{Tr}(\mathbf{T}^*\mathbf{S})$$

が定義されるが，この inner product を通じて $\mathfrak{P}_0$ は self-dual である。すなわち

$$\mathbf{T}\in\mathfrak{P}_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \langle\mathbf{T}|\mathbf{S}\rangle\geq 0\quad \forall\,\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_0$$

となっている。$\mathfrak{P}_+$ の dual cone を $\mathfrak{P}_-$ と書こう。すなわち

$$\mathbf{T}\in\mathfrak{P}_- \quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad \langle\mathbf{T}|\mathbf{S}\rangle\geq 0\quad \forall\,\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_+$$

と定義すると $\mathfrak{P}_+\subset\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}_-$ で，$\mathfrak{P}_+$ と $\mathfrak{P}_-$ は互いに dual cone になっている。

基本的なことは，

$$\mathbf{S}=[S_{j,k}]_{j,k=1}^m\in\mathfrak{P}_- \quad\Longleftrightarrow\quad [\langle x|S_{j,k}x\rangle]_{j,k=1}^m\in\mathbb{M}_m^+\quad \forall\,x\in\mathbb{C}^n \tag{6}$$

となっており，(5) の一般化であることが判る。

勿論 (3) (よって (4)) に対応するのは

$$\mathbf{S}\in\mathfrak{P}_0 \quad\Longleftrightarrow\quad [\langle x_j|S_{j,k}x_k\rangle]_{j,k=1}^m\ \in\mathbb{M}_n^+\quad \forall\,x_j\in\mathbb{C}^n\ (j=1,2,\ldots,m) \tag{7}$$

である。

$\mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ が条件

$$j + k = j' + k' \quad \Longrightarrow \quad S_{j,k} = S_{j',k'}$$

を満たすとき，Hankel-type （またブロック Hankel 行列）という。また条件

$$j - k = j' - k' \quad \Longrightarrow \quad S_{j,k} = S_{j',k'}$$

を満たすとき，Toeplitz-type（またブロック Toeplitz 行列）という。したがって，Theorem 1 は Hankel-type および Toeplitz-type のものを取り扱っていることになる。

$\Phi(\cdot)$ を Hilbert 空間 $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ から ブロック Hankel 行列の作る部分空間への orthoprojection, また $\Psi(\cdot)$ は ブロック Toeplitz 行列の作る部分空間への orthoprojection とする。

この設定の下で Fejer-Riesz の定理が有用になるのは，

$$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_- \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{M}_n \ni \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{m-1} \end{bmatrix}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{m-1} \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}$$

という事実である。この事により，Hankel-type または Toeplitz-type のとき $\mathfrak{P}_-$ と $\mathfrak{P}_0$ の結び着きが現れる。すなわち Fejer-Riesz の定理は次ぎの形に書かれる。

Theorem 2. $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ としよう。

(a) $\Phi(\mathbf{S}) = \Phi(\mathbf{T}) \quad \exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$.

(b) $\Psi(\mathbf{S}) = \Psi(\mathbf{T}) \quad \exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$.

さらに (a) でも (b) でも $\mathbf{T} = [T_{j,k}]_{j,k=1}^m$ は $T_{j,k} = X_j^* X_k \quad \exists\, X_j \in \mathbb{M}_n \ (j = 1, 2, \ldots, m)$ の形であることも要求することが出来る。

したがって，

(a) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$, Hankel-type $\Longrightarrow$ $\mathbf{S} = \Phi(\mathbf{T}) \quad \exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$.

(b) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$, Toeplitz-type $\Longrightarrow$ $\mathbf{S} = \Psi(\mathbf{T}) \quad \exists\, \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0$.

この結果の dual な形として, Hankel-type や Toeplitz-type の仮定の下で，$\mathfrak{P}_0$ と $\mathfrak{P}_+$ を関係付ける基となるのが，次ぎの Truncated moment theorem である。

Truncated moment theorem ([1] 参照) $0 \le \mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ とする。

(a) $\mathbf{S}$ が Hankel-type $\Longrightarrow$ $\exists\, t_l \in \mathbb{R},\ E_l \in \mathbb{M}_n^+\ (j = 1, 2, \ldots, N),\ Q \in \mathbb{M}_n^+$

$$S_{j,k} = \sum_{l=1}^N t_l^{j+k-2} E_l \quad \forall\ (j + k < 2m), \quad S_{m,m} = \sum_{l=1}^N t_l^{2m-2} E_l + Q.$$

(b) $\mathbf{S}$ が Toeplitz-type $\Longrightarrow$ $\exists\, t_l \in \mathbb{R},\ E_l \in \mathbb{M}_n^+\ (j = 1, 2, \ldots, N)$

$$S_{j,k} = \sum_{l=1}^N e^{i(k-j)t_l} E_l.$$

この定理が現在の状況に適用できるのは, 上の t_l, E_l, Q などを使って

(a) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ が Hankel-type ならば

$$\mathbf{S} = \sum_{l=1}^N ([1, t_l, \ldots t_l^{m-1}]^* \cdot [1, t_l, \ldots, t_l^{m-1}]) \otimes E_l + ([0, \ldots, 0, 1]^* \cdot [0, \ldots, 0, 1]) \otimes Q$$

(b) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ が Toeplitz-type ならば

$$\mathbf{S} = \sum_{l=1}^N ([1, e^{it_l}, \ldots, e^{i(m-1)t_l}]^* \cdot [1, e^{it_l}, \ldots, e^{i(m-1)t_l}]) \otimes E_l$$

となり

$$[1, t_l, \ldots t_l^{m-1}]^* \cdot [1, t_l, \ldots, t_l^{m-1}], \quad [1, e^{it_l}, \ldots, e^{i(m-1)t_l}]^* \cdot [1, e^{it_l}, \ldots, e^{i(m-1)t_l}] \ \in \mathbb{M}_m^+$$

のことから, $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_+$ が判るからである。これを次ぎの形に書こう：

Theorem 3. $\mathbf{S} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ としよう。

(a) $\Phi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_0 \Longrightarrow \Phi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_+.$

(b) $\Psi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_0 \Longrightarrow \Psi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_+.$

$\mathfrak{P}_+$ と $\mathfrak{P}_-$ が, また $\mathfrak{P}_0$ は自分自身と, dual cone になっていることから, Theorem 2(a) と Theorem 3(a) が, また Theorem 2(b) と Theorem 3(b) が互い同値な命題になっていることが判る。

参考文献

[1] T. Ando, *Truncated moment problems,* Acta Sci. Math. (Szeged), 31(1970), 319-334.

[2] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Hardy Classes and Operator Theory,* Oxford Univ. Press, New York, 1977.